Przykład 2

Przedstaw trójmian kwadratowy w postaci iloczynowej.

a) $y = 2x^2 + 5x - 3$

$\Delta = 25 + 24 = 49$, $\sqrt{\Delta} = 7$, zatem:

$$x_1 = \frac{-5-7}{4} = -3, \quad x_2 = \frac{-5+7}{4} = \frac{1}{2}$$

Postać iloczynowa: $y = 2(x+3)(x-\frac{1}{2})$.

b) $y = x^2 - 2x - 1$

$\Delta = 4 + 4 = 8$, $\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{2}$, zatem:

$$x_1 = \frac{2-2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}, \quad x_2 = \frac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$$

Postać iloczynowa: $y = \left(x - (1-\sqrt{2})\right)\left(x - (1+\sqrt{2})\right)$, którą możemy zapisać: $y = (x - 1 + \sqrt{2})(x - 1 - \sqrt{2})$.

c) $y = -2x^2 + x - 4$

$\Delta = 1 - 32 = -31 < 0$, więc trójmian nie ma pierwiastków i nie można go rozłożyć na czynniki liniowe.

Ćwiczenie 2

Przedstaw trójmian kwadratowy w postaci iloczynowej.

a) $y = 12x^2 + 11x + 2$
c) $y = 2x^2 - 3x + 4$
e) $y = 5x^2 - 3x$
b) $y = 3x^2 - 7x + 2$
d) $y = -7x^2 + 10x - 4$
f) $y = 9x^2 - 8$

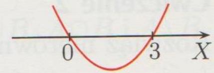
Przykład 2

Rozwiąż nierówność.

a) $2x^2 - 6x > 0$

W celu wyznaczenia miejsc zerowych funkcji $y = 2x^2 - 6x$ rozwiązujemy równanie $2x^2 - 6x = 0$, czyli $2x(x-3) = 0$. Zatem $x = 0$ lub $x = 3$.

Rozwiązania równania zaznaczamy na osi OX. Szkicujemy parabolę o ramionach skierowanych do góry (współczynnik przy x^2 jest dodatni), przechodzącą przez zaznaczone punkty. Z wykresu odczytujemy: $2x^2 - 6x > 0$ dla $x \in (-\infty; 0) \cup (3; \infty)$.



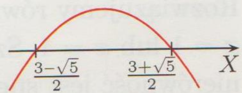
b) $-x^2 + 3x - 1 \geqslant 0$

Rozwiązujemy równanie $-x^2 + 3x - 1 = 0$.

$\Delta = 9 - 4 = 5$, zatem: $x_1 = \frac{-3-\sqrt{5}}{-2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{-3+\sqrt{5}}{-2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Rozwiązania równania zaznaczamy na osi OX. Szkicujemy parabolę o ramionach skierowanych w dół (współczynnik przy x^2 jest ujemny), przechodzącą przez zaznaczone punkty. Z wykresu odczytujemy:

$$-x^2 + 3x - 1 \geqslant 0 \text{ dla } x \in \left\langle \frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right\rangle.$$



Ćwiczenie 1

Rozwiąż nierówność.

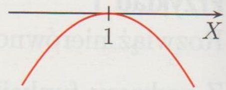
a) $3x^2 - 2x - 1 \geqslant 0$ b) $-x^2 + 2x + 4 > 0$ c) $2x^2 + x - 1 \leqslant 0$

Przykład 3

Rozwiąż nierówność $-x^2 + 2x - 1 \geqslant 0$.

Rozwiązujemy równanie $-x^2 + 2x - 1 = 0$, czyli $-(x-1)^2 = 0$. Zatem $x = 1$ (jest to pierwiastek podwójny). Rozwiązanie równania zaznaczamy na osi OX i szkicujemy parabolę o ramionach skierowanych w dół.

Z wykresu odczytujemy: $-x^2 + 2x - 1 \geqslant 0$ dla $x = 1$.

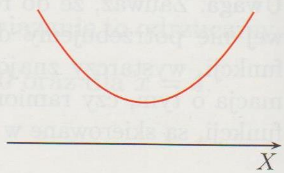


Przykład 4

a) Rozwiąż nierówność $5x^2 - 3x + 2 < 0$.

$\Delta = 9 - 4 \cdot 5 \cdot 2 = -31 < 0$

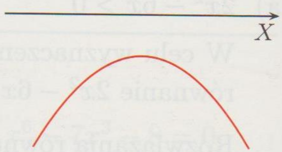
Współczynnik przy x^2 jest dodatni oraz równanie $5x^2 - 3x + 2 = 0$ nie ma pierwiastków. Parabola znajduje się zatem nad osią OX, a to oznacza, że nierówność jest sprzeczna.



b) Rozwiąż nierówność $-3x^2 + 2x - 1 < 0$.

$\Delta = 4 - 4 \cdot (-3) \cdot (-1) = -8 < 0$

Współczynnik przy x^2 jest ujemny oraz równanie $-3x^2 + 2x - 1 = 0$ nie ma pierwiastków. Parabola znajduje się zatem pod osią OX, a to oznacza, że nierówność jest prawdziwa dla dowolnego x, czyli $x \in \mathbf{R}$.



Ćwiczenie 2

Rozwiąż nierówność.

a) $4x^2 + 4x + 1 > 0$ b) $x^2 + x + 1 < 0$ c) $-2x^2 + \sqrt{2}x - 1 \leqslant 0$

Przykład 1

Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację graficzną.

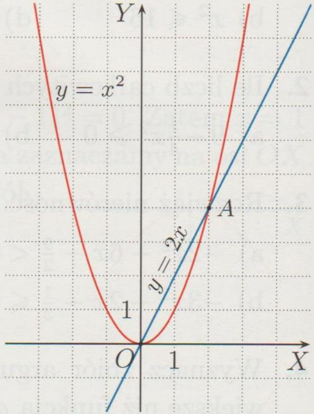
$$\begin{cases} y = 2x \\ y = x^2 \end{cases}$$

Porównujemy prawe strony obu równań i otrzymujemy $x^2 = 2x$, czyli $x^2 - 2x = 0$, skąd $x(x-2) = 0$. Rozwiązaniami równania są liczby 0 i 2.

Dla $x = 0$ mamy $y = 0$. Dla $x = 2$ mamy $y = 4$.

Układ równań spełniają zatem dwie pary liczb:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$



Prosta $y = 2x$ przecina parabolę $y = x^2$ w punktach $O(0,0)$ i $A(2,4)$.

Ćwiczenie 1

Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację graficzną.

a) $\begin{cases} y = -x \\ y = x^2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = x + 2 \\ y = x^2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = -x - 2 \\ y = -x^2 \end{cases}$

Przykład 1

Określ liczbę pierwiastków równania $2x^2 - mx + 2 = 0$ w zależności od parametru m.

$$\Delta = (-m)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = m^2 - 16$$

- Równanie ma dwa różne pierwiastki, gdy $\Delta = m^2 - 16 > 0$, czyli dla $m \in (-\infty; -4) \cup (4; \infty)$.
- Równanie ma dokładnie jeden pierwiastek, gdy $\Delta = m^2 - 16 = 0$, czyli dla $m = -4$ lub $m = 4$.
- Równanie nie ma pierwiastków, gdy $\Delta = m^2 - 16 < 0$, czyli dla $m \in (-4; 4)$.

Ćwiczenie 2

Dla jakich wartości parametru m równanie ma dwa różne pierwiastki?

a) $-3x^2 + 2x - m = 0$ b) $x^2 + (2m+1)x + 5 = 0$ c) $mx^2 + x - m = 0$